Matematica

Cristina **Masella**, Nicoletta **Passera**, Gianandrea **Ubiali**

Orientamenti e spunti per la prova scritta

Norme ministeriali per la prova scritta
Dal D.M. 26 agosto 1981 (G.U. n. 249 del 10 settembre 1981)

La prova scritta di matematica deve tendere a verificare le capacità e abilità essenziali indicate dai programmi ministeriali, con riferimento ad un certo numero di argomenti, scelti tra quelli maggiormente approfonditi nel triennio. A tal fine si darà una prova che dovrà riferirsi a più aree tematiche (fra quelle previste dai programmi) e a diversi tipi di conoscenze: la prova sarà articolata su tre o quattro quesiti, che non comportino soluzioni dipendenti l'una dall'altra.
In tal modo si eviterà che la loro progressione blocchi l'esecuzione della prova stessa.
Ad evitare una suddivisione troppo schematica dei contenuti, argomenti tratti da temi diversi potranno opportunamente coesistere nei singoli quesiti.
I quesiti potranno toccare sia aspetti numerici, sia aspetti geometrici, senza peraltro trascurare nozioni elementari nel campo della statistica e della probabilità. Uno dei quesiti riguarderà gli aspetti matematici di una situazione avente attinenza con attività svolte dagli allievi nel corso del triennio nel campo delle scienze sperimentali, dell'educazione tecnica o eventualmente di altri ambiti di esperienza.
Ogni commissione deciderà se e quali strumenti di calcolo potranno essere consentiti dandone preventiva comunicazione ai candidati.

Durata della prova: 3 ore

Norme ministeriali e indicazioni per alunni B.E.S.

Per aiutare la stesura delle prove d'esame per gli alunni B.E.S. e per aiutare a progettare una didattica mirata proponiamo uno stralcio tratto dalla pubblicazione *Strumenti d'intervento per alunni con bisogni educativi speciali e organizzazione territoriale per l'inclusione scolastica*: concetti chiave e orientamenti per l'azione, pubblicato dall'Ufficio Scolastico della Regione Lombardia.

Gli alunni disabili della scuola secondaria di II grado *e di I grado (ndr)* che hanno seguito un percorso didattico individualizzato-differenziato sono ammessi a sostenere esami di Stato su prove differenziate coerenti con il percorso svolto e finalizzate unicamente al rilascio dell'attestazione delle competenze.
I testi delle prove sono elaborati dalla Commissione sulla base della documentazione fornita dal Cdc. Al termine viene rilasciata un'attestazione delle competenze art. 13 DPR 323/1998. È importante ricordare che le prove differenziate vanno indicate nell'attestazione, ma non nei tabelloni. Per gli alunni disabili che sostengono gli esami di Stato e conseguono il diploma la Commissione può predisporre prove equipollenti consistenti nell'uso di mezzi tecnici o in modalità differenti di sviluppo dei contenuti culturali e professionali che comprovano che il candidato ha raggiunto una preparazione per il rilascio del titolo studio con valore legale.
Nell'esame dei **candidati con DSA** (art.18 O.M. n. 13 del 24.4.2013), la Commissione terrà in debita considerazione le modalità didattiche e le forme di valutazione individuate nell'ambito dei percorsi didattici individualizzate e elaborato dal Cdc.
A tal proposito si suggerisce che il Cdc predisponga un dossier a parte, relativo al percorso scolastico dello studente con DSA, contenente diagnosi, profilo di funzionamento, PDP, forme di verifica valutazione e, comunque, tutti quei documenti che possono essere utili alla commissione affinché valuti con completezza e imparzialità l'apprendimento dello studente con DSA. Il dossier deve essere consegnato direttamente al Presidente della Commissione d'Esame e alla Commissione stessa all'atto dell'insediamento.
Sulla base degli elementi forniti dal Consiglio di Classe, le Commissioni predispongono adeguate modalità di svolgimento delle prove scritte e orali, adeguate al PDP seguito dallo studente nel corso dell'anno scolastico. In particolare tali studenti:
A. possono utilizzare tutti gli strumenti compensativi indicati nel PDP già utilizzati per le verifiche in corso d'anno o comunque ritenuti idonei per il positivo svolgimento dell'esame (art. 5 del DM 5669/2011);
B. accedono alla decodifica delle consegne delle prove scritte attraverso tre modalità, l'una alternativa all'altra:
   1. Testi trasformati in formato MP3 audio
   2. Lettore umano
   3. Trascrizione del testo su supporto informatico da parte della Commissione e suo utilizzo attraverso un software di sintesi vocale

C. hanno diritto a tempi aggiuntivi per l'espletamento delle prove. In generale, i tempi aggiuntivi sono quantificabili nel 30% in più del tempo previsto per il gruppo classe; con particolare attenzione ai tempi necessari all'accertamento delle competenze afferenti la lingua straniera;
D. hanno diritto all'adozione di criteri valutativi più attenti al contenuto che alla forma;
E. nel caso in cui ci sia stata dispensa dalla/e lingua/e straniera/e scritta/e possono sostituire la prova scritta con una prova orale la cui modalità e i cui contenuti saranno definiti dalla Commissione d'Esame. La prova orale dovrà essere sostenuta dal candidato o il giorno stesso, in contemporanea o in differita, oppure in giorno successivo, comunque prima della pubblicazione degli esiti delle prove scritte.
F. Nel caso in cui ci sia stato esonero dalla lingua straniera, (art. 6 c. 6 del DM 12 luglio 2011) è prevista solo l'attestazione delle competenze (art. 13 dpr 323/1998). Tutto ciò comparirà nell'attestato rilasciato allo studente e non nei tabelloni affissi all'albo.
Riguardo al recupero di eventuali debiti scolastici per gli studenti iscritti nella scuola secondaria di II grado, è necessario che il Cdc calendarizzi con congruo anticipo le prove scritte e orali. Come già sottolineato, per uno studente DSA risulta oltremodo faticoso sostenere più prove, scritte e/o orali nel medesimo giorno o in giorni immediatamente successivi, e ciò per la mancata automatizzazione delle abilità di base.
Per le prove scritte e orali vale quanto già affermato per le verifiche proposte nel corso dell'anno scolastico: lo studente potrà utilizzare le stesse dispense e le medesime compensazioni previste nel PDP.
La valutazione degli studenti che vivono altre situazioni di BES richiede di porre al centro alcuni principi guida che dovrebbero caratterizzare sempre le azioni valutative della scuola nei confronti degli apprendimenti degli alunni:
- è necessario distinguere monitoraggio, controllo, verifica e valutazione degli apprendimenti;
- è indispensabile che la valutazione non sia solo sommativa ma anche, e soprattutto, formativa;

- è auspicabile che la valutazione sia sempre globale e multifattoriale mai parcellizzata e segmentata.
La valutazione deve inoltre tener conto:
- della situazione di partenza;
- dei risultati raggiunti dallo studente nel suo personale percorso di apprendimento;
- dei risultati riconducibili ai livelli essenziali degli apprendimenti previsti per la classe frequentata e per il grado di scuola di riferimento;
- delle competenze acquisite nel percorso di apprendimento.
Per questo è importante che il Collegio docenti:
- stabilisca i livelli essenziali di competenza disciplinare al fine di valutare la congruenza con il percorso della classe e la possibilità di passaggio per l'alunno alla classe successiva;
- concordi eventuali possibili modalità di raccordo con i contenuti disciplinari previsti per l'intera classe
In ogni caso, per una corretta e completa valutazione è buona cosa che il Cdc:
- definisca chiaramente che cosa, come e perché si sta valutando;
- separi i contenuti della valutazione dalle capacità strumentali necessarie a condividerli e ad esplicitarli;
- dedichi attenzione al processo più che al solo prodotto elaborato;
- predisponga lo svolgimento delle verifiche secondo le condizioni abituali individuate per lo studente.
È inoltre necessario che nella stesura delle prove (in itinere e) finali ogni docente tenga conto in particolare degli obiettivi irrinunciabili e degli obiettivi essenziali della propria materia, anche nella prospettiva di un curricolo verticale, soprattutto al fine di evitare riduzioni del curricolo di studio che precluderebbero l'ottenimento di un titolo con valore legale.
Come indicato anche nella nota del MIUR del 22.11.2013: *"La scuola può intervenire nella personalizzazione in tanti modi diversi, informali o strutturati, secondo i bisogni e la convenienza; pertanto la rilevazione di una mera difficoltà di apprendimento non dovrebbe indurre all'attivazione di un percorso specifico con la conseguente compilazione di un Piano Didattico Personalizzato".*
Inoltre, "*nel caso di difficoltà non meglio specificate, soltanto qualora nell'ambito del Consiglio di classe (nelle scuole secondarie) o del team docenti (nelle scuole primarie) si concordi di valutare l'efficacia di strumenti specifici questo potrà comportare l'adozione e quindi la compilazione di un Piano Didattico Personalizzato, con eventuali strumenti compensativi e/o misure dispensative.*
Non è compito della scuola certificare gli alunni con bisogni educativi speciali, ma individuare quelli per i quali è opportuna e necessaria l'adozione di particolari strategie didattiche".
Pertanto l'uso di strumenti compensativi e di particolari metodologie didattiche nel corso dell'anno scolastico, e fino al momento in cui il PDP eventualmente non decada, dev'essere finalizzato a mettere in grado lo studente di affrontare l'esame di licenza o l'esame di Stato con le stesse possibilità degli altri studenti della stessa classe, riducendo al minimo la fatica e le difficoltà conseguenti lo specifico BES.
È giusto ricordare quindi che il docente, proprio perché esperto nella metodologia didattica, sia generale sia afferente la specifica materia di insegnamento, deve prima di tutto prevedere nel PDP l'utilizzo di metodologie didattiche individualizzate e personalizzate e, solo in seconda istanza, di eventuali compensazioni e di possibili dispense.
In sede di esame di Stato per questi alunni non sono attualmente previste modalità differenziate di verifica degli apprendimenti, anche se ciò potrebbe essere auspicabile.
L'uso temporaneo di dispense, di compensazioni e di flessibilità didattica è utile al fine di porre lo studente nelle condizioni di sostenere, al termine del percorso di studi, l'esame di licenza e l'esame di Stato con le stesse modalità e i medesimi tempi degli alunni che non vivono situazioni di BES.
L'uso di strumenti compensativi e, solo se necessarie, di misure dispensative non deve generare alcuna dipendenza da parte dell'allievo, aggravando la sua peculiare difficoltà. L'uso di tali dispositivi deve anzi metterlo nella condizione di superare eventuali ritardi e/o problematicità e/o complicanze afferenti l'apprendimento.
Il documento è stato redatto a cura dell'Ufficio Scolastico Regionale per la Lombardia con la collaborazione dei referenti provinciali UST, dei Dirigenti scolastici del Tavolo tematico "Successo scolastico", di esperti e con la condivisione del GLIR Lombardia.
L'intero documento è reperibile al seguente indirizzo: www.istruzione.lombardia.gov.it/protlo45_2014/

Nella stesura della prova d'esame di matematica riteniamo utile, oltre ovviamente seguire la vigente normativa, fare riferimento anche ad alcune semplici indicazioni che vengono di seguito suggerite:

- Costruire la prova con quattro quesiti, aventi soluzioni indipendenti l'una dall'altra, di cui tre inerenti a argomenti specifici della matematica svolti nel triennio e uno che consiste nell'applicazione della matematica in contesti scientifici o tecnologici.
- Formulare ciascun quesito attraverso varie richieste di difficoltà crescente al fine di consentire il raggiungimento di un livello di competenza accettabile da parte dei ragazzi che mostrano maggiori difficoltà e contemporaneamente un livello di eccellenza da parte di coloro che sono più sicuri.
- Organizzare i quattro quesiti in modo che coinvolgano i quattro ambiti fondamentali descritti nelle Indicazioni nazionali: Numeri, Spazio e figure, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni.
- Elaborare i testi dei quesiti in modo che siano chiari e semplici, abbandonando solo in occasione dell'esame una contestualizzazione più elaborata e legata alla realtà, in modo che anche gli alunni più fragili o certificati

con DSA, possano comprendere facilmente la situazione problematica da risolvere.

- Arricchire i testi della prova per gli alunni con DSA di schemi, tabelle e formulari, per agevolarne la risoluzione, senza modificare eccessivamente le richieste dei vari quesiti.
- Stabilire e comunicare preventivamente quali strumenti di calcolo (tavole numeriche, calcolatrice..) sono consentiti durante la prova.

La nostra proposta è articolata in tre prove elaborate per ipotetiche classi che abbiano raggiunto alla fine del triennio gli obiettivi prefissati rispettivamente in modo essenziale (Prova n. 1), in modo completo (Prova n. 2) e in modo approfondito (Prova n. 3).
Ovviamente ciascuna commissione può prendere spunto da tali prove e formularne altre combinando in maniera diversa i vari quesiti.

TESTO PROVA N. I

1. Algebra. Espressioni polinomiali

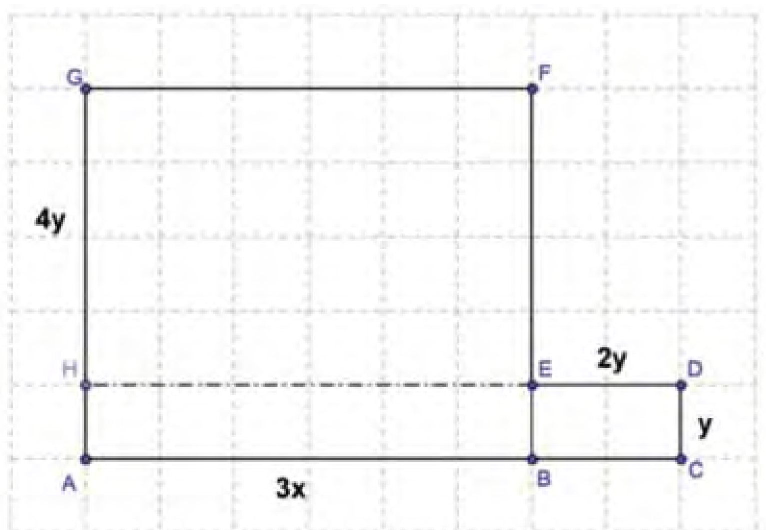
Date le espressioni:

A) $2\,(y+x)+2(y+3)^2-3(6-x)-(2y^2-x)$

B) $\left\{\left[\frac{3}{2}(4x^2+2y^2)+5x(x+y^2)\right]-\left[\frac{9}{5}y^2\left(-5x+\frac{5}{3}\right)+11x^2\right]+(x+2y)y^2\right\}:y$

a) Risolvi l'espressione A).
b) Risolvi l'espressione B).
c) Indica i gradi dei polinomi risultati delle due espressioni.

Data la seguente figura:



d) Verifica che il suo perimetro è uguale al valore dell'espressione A).
e) Verifica che la sua area è uguale al valore dell'espressione B).

2. Geometria. Parallelepipedo e piramide

Un parallelepipedo rettangolo a base quadrata ha l'area di base di 100 cm^2 e il volume di 1400cm^3. Calcola:
a) Lo spigolo di base e l'altezza del parallelepipedo.
b) L'area della superficie laterale del parallelepipedo.

Sopra il parallelepipedo è posta una piramide quadrangolare regolare avente la base coincidente con quella del parallelepipedo e l'altezza uguale ai 6/5 dello spigolo di base.

Calcola:
c) L'apotema della piramide.
d) Rappresenta il solido composto in scala 1:5.
e) L'area della superficie del solido composto e il suo volume.

3. Piano cartesiano

In un sistema di riferimento cartesiano fissa i seguenti punti:

- A(0; +16)
- B(+6; +16)
- C(+6; +10)
- D(0; +2)

a) Uniscili nell'ordine dato, riconosci il quadrilatero ottenuto.
b) Calcola il suo perimetro (u = 1 cm).
c) Calcola la sua area (u = 1 cm).
d) Disegna il quadrilatero A'B'C'D', simmetrico del quadrilatero ABCD rispetto all'asse y, scrivendo le coordinate dei suoi vertici.
e) Calcola il rapporto tra l'area del triangolo CDC' e l'area del quadrilatero BCC'B'.

4. Genetica

Nel sangue umano una caratteristica genetica è la presenza o meno del fattore Rh.

I casi possibili sono i seguenti:

- individuo con il fattore Rh (**Rh+**); si distinguono due casi:
  - omozigote dominante (qui indicato con RR);
  - eterozigote (qui indicato con Rr);
- individuo senza il fattore Rh (**Rh-**): omozigote recessivo (qui indicato con rr).

Considera le seguenti situazioni:

A) Un genitore omozigote dominante (RR) e un genitore omozigote recessivo (rr);
B) Due genitori entrambi eterozigoti (Rr).

a) Realizza la tabella di Punnett relativa al caso A);
b) Realizza la tabella di Punnett relativa al caso B);
c) Calcola la probabilità che nasca un figlio con fattore Rh- nel caso A)
d) Calcola la probabilità che nasca un figlio con fattore Rh- nel caso B)
e) Indica in quale tra i casi A) e B) è maggiore la probabilità che nasca un figlio Rh+.

TESTO PROVA N. 2

1. Algebra. Equazioni

Date le espressioni:

A) $3(x-1)+x^2+4x-x(x+5)=3x-4$

B) $\frac{5x-1}{2}-(x+4)=\frac{x-3}{6}$

a) Risolvi l'equazione 1).
b) Risolvi l'equazione 2).
c) Che cosa significa che due equazioni sono equivalenti? Le due equazioni che hai risolto precedentemente sono equivalenti?
d) Verifica una delle due equazioni a tua scelta.
e) Che cosa significa che una equazione è impossibile? E indeterminata?

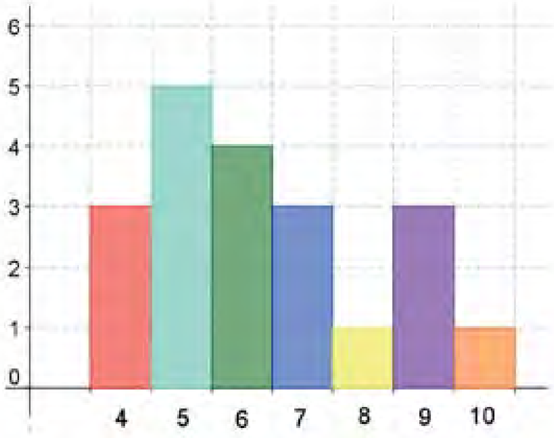
2. Geometria. Cilindro e cono

Sono dati un cono e un cilindro equivalenti di uguale area di base di 900 π cm^2.
L'altezza del cilindro misura i 2/5 del raggio di base. Calcola:

A) l'altezza del cono.
B) l'area della superficie laterale e l'area della superficie totale del cilindro.
C) l'area della superficie laterale e l'area della superficie totale del cono.
D) il volume dei due solidi.
E) Il peso in kg dei due solidi sapendo che il cilindro è di alluminio ($p_s=2{,}6$) e il cono è di quarzo ($p_s=2{,}5$).

3. Statistica

La figura mostra un istogramma con i voti riportati dagli alunni di una classe di una scuola superiore in un compito di inglese.



a) Organizza i dati in una tabella e calcola la frequenza assoluta, quella relativa e quella percentuale.
b) Rappresenta i dati con un areogramma.
c) Calcola la moda di questa distribuzione di dati.
d) Calcola la media aritmetica di questa distribuzione di dati.
e) Calcola la mediana di questa distribuzione di dati.

4. Proporzionalità

La seguente tabella rappresenta i valori dei pesi (in kg) di alcuni oggetti e del relativo allungamento (in mm) della molla del dinamometro a cui vengono appesi.

x = intensità della forza	y = allungamento molla
1,5 kg	12 mm
	9 mm
0,5 kg	4 mm
0,625 kg	
1,25 kg	
	16 mm

a) Con i dati riportati in tabella puoi osservare la relazione tra l'intensità della Forza e l'allungamento della molla. Si tratta di una proporzionalità diretta o inversa?
b) Calcola la costante di proporzionalità e scrivi la relazione che lega x e y.
c) Completa la tabella con i dati mancanti.
d) In un piano cartesiano costruisci il grafico che rappresenta la relazione.
e) Riconosci il tipo di grafico ottenuto.

TESTO PROVA N. 3

1. Algebra. Equazioni

Data l'equazione $ax = b$ indica, al variare di a e di b, quando tale equazione è determinata, indeterminata o impossibile.
Risolvi le seguenti equazioni e verificane una a tua scelta:

A) $x - 5 - 2x = -2(x + 1)$

B) $\frac{5x+1}{3} - \frac{3}{4} = \frac{4x+3}{12} + \frac{2x+1}{2}$

C) $(4x - 3)^2 + 2 - 4(2x - 1)^2 = 2x - 8$

2. Geometria. Solidi di rotazione

Un foglio di carta rettangolare (formato A4) ha le dimensioni di 16 cm e 24 cm. Con questo foglio di carta puoi costruire due cilindri diversi tra loro, curvando il foglio in modo da far combaciare l'una coppia o l'altra coppia di lati uguali. Dopo aver rappresentato graficamente le due figure, rispondi alle seguenti domande eseguendo tutti gli opportuni calcoli.

a) I due cilindri avranno la stessa superficie laterale?
b) Avranno la stessa superficie totale?
c) Calcola il volume del solido ottenuto dalla rotazione del foglio A4 attorno al lato minore (rappresenta graficamente la figura ottenuta).
d) Calcola il volume del solido ottenuto dalla rotazione del foglio A4 attorno al lato maggiore (rappresenta graficamente la figura ottenuta).
e) Calcola il peso degli ultimi due solidi sapendo che la carta ha $p_s = 0{,}97$

3. Probabilità

Un cubo regolare ed un tetraedro regolare (entrambi di materiale omogeneo) hanno le facce numerate con i numeri naturali da 1 in poi. Lanciamo in aria sia il cubo che il tetraedro e lasciamoli cadere: prendiamo in considerazione le facce a terra.

a) Quanti sono i casi possibili (ugualmente probabili) per ognuno dei due solidi?
b) Qual è la probabilità che la faccia a terra del cubo sia il numero 4?
c) Qual è la probabilità che la faccia a terra del tetraedro sia il numero 5?
d) Qual è la probabilità che la faccia a terra del cubo sia un numero pari?
e) Qual è la probabilità che la faccia a terra del tetraedro sia un numero dispari?

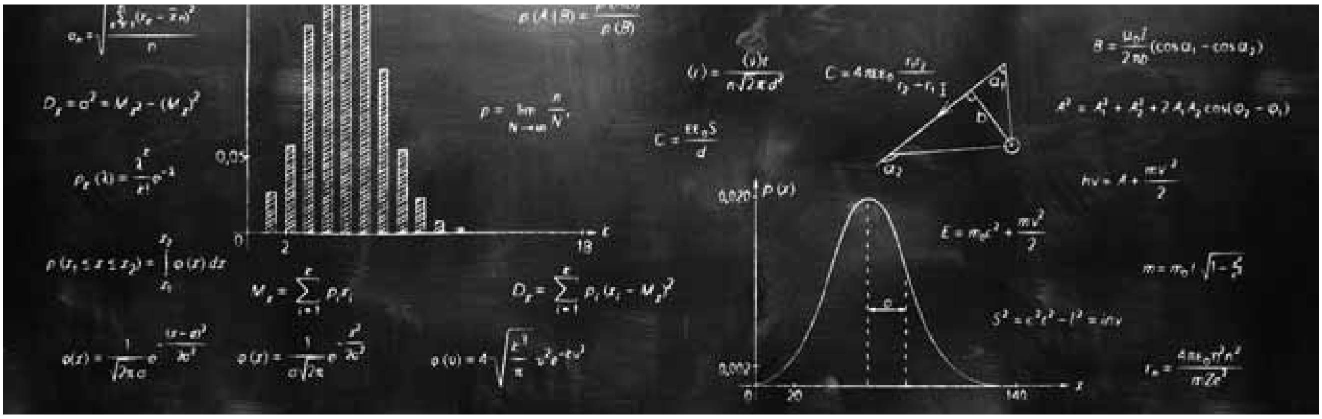
4. Leve

Due bambini si dondolano su un'altalena composta da un bastone lungo 12 m col fulcro posto a metà della sua lunghezza.
Sapendo che il primo bambino pesa 45 kg (R) e si trova a 2 m (b_r) dal fulcro e il secondo bambino pesa 30 kg (P):

a) Calcola la distanza dal fulcro del secondo bambino affinché la leva sia in equilibrio.
b) Rappresenta con un disegno la leva in modo che sia fedele alla situazione indicata.
c) Mantenendo costanti i valori attribuiti a R e br, completa la tabella in modo che la leva continui a rimanere in equilibrio.

P			30	40		
bp	*6*	*4,5*			*1,8*	*1,5*

d) Fissato un sistema di riferimento cartesiano riporta in ascissa i valori della potenza e in ordinata quelli del braccio della potenza e costruisci il grafico.
e) Che legge rappresenta il grafico individuato?



ESEMPIO DEL TESTO PROVA N. 1 FACILITATA PER ALUNNI CON DSA

(Le aggiunte apportate per facilitare il testo per gli alunni DSA, sono indicate con altro colore)

1. Algebra. Espressioni polinomiali

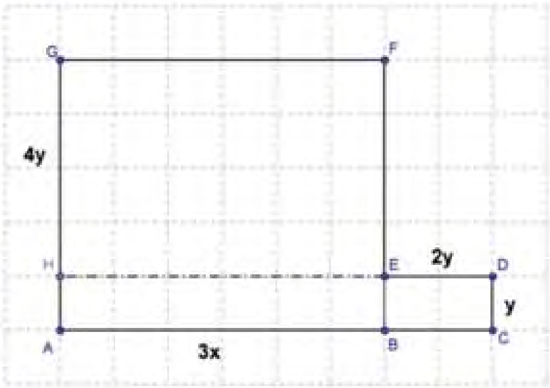
Date le espressioni:

A) $2(y+x)+2(y+3)^2-3(6-x)-(2y^2-x)$

B) $\left\{\left[\frac{3}{2}(4x^2+2y^2)+5x(x+y^2)\right]-\left[\frac{9}{5}y^2\left(-5x+\frac{5}{3}\right)+11x^2\right]+(x+2y)y^2\right\}:y$

a) Risolvi l'espressione A).
b) Risolvi l'espressione B).
Ricorda che nella risoluzione delle espressioni proposte devi eseguire prima i prodotti (notevoli, tra un coefficiente e un polinomio e tra un monomio e un polinomio), facendo molta attenzione ai segni. In un secondo momento esegui le addizioni algebriche.
c) Indica i gradi dei polinomi risultati delle due espressioni.
Ricorda che il grado di un polinomio è il più grande tra i gradi dei monomi che lo compongono.

Data la seguente figura:



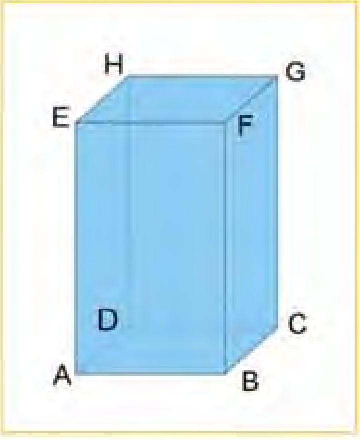
Per i due quesiti successivi devi esprimere il perimetro e l'area della figura utilizzando le misure dei lati espressi con dei monomi.
d) Verifica che il suo perimetro è uguale al valore dell'espressione A).
e) Verifica che la sua area è uguale al valore dell'espressione B).

2. Geometria. Parallelepipedo e piramide

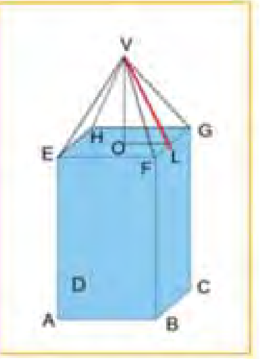
Un parallelepipedo rettangolo a base quadrata ha l'area di base di 100 cm^2 e il volume di 1400cm^3. Calcola:
a) Lo spigolo di base e l'altezza del parallelepipedo.
b) L'area della superficie laterale del parallelepipedo.

DATI:
A_{ABCD} = 100 cm^2; V = 1400 cm^3

RICHIESTE:
AB = ?
AE = ?
$S_{LATERALE}$ = ?



Sopra il parallelepipedo è posta una piramide quadrangolare regolare avente la base coincidente con quella del parallelepipedo e l'altezza uguale ai 6/5 dello spigolo di base, **come rappresentato nel disegno.**

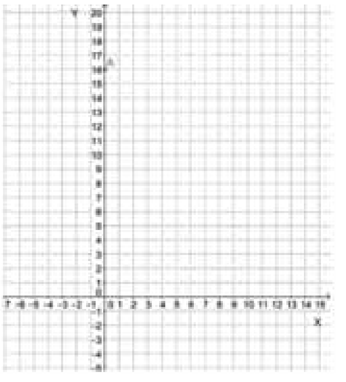


Calcola:
c) L'apotema della piramide.
Ricorda che l'apotema è l'altezza della faccia laterale della piramide, e nel disegno coincide con il segmento VL.
d) Rappresenta il solido composto in scala 1:5.
e) L'area della superficie del solido composto e il suo volume.
Per calcolare l'area della superficie del solido devi calcolare le aree laterali dei due solidi e aggiungere solo una volta l'area di base.

3. Piano cartesiano

In un sistema di riferimento cartesiano fissa i seguenti punti:

- A(0; +16)
- B(+6; +16)
- C(+6; +10)
- D(0; +2)



Ricorda che nelle coordinate il primo numero rappresenta l'ascissa (x) e quindi il valore sull'asse orizzontale, mentre il secondo numero l'ordinata (y) cioè il valore sull'asse verticale (come in figura).

a) Uniscili nell'ordine dato, riconosci il quadrilatero ottenuto.
b) Calcola il suo perimetro (u = 1 cm).
c) Calcola la sua area (u = 1 cm).
d) Disegna il quadrilatero A'B'C'D', simmetrico del quadrilatero ABCD rispetto all'asse y, scrivendo le coordinate dei suoi vertici.
Ricorda che due punti A e A' sono simmetrici rispetto all'asse y se tale retta è asse del segmento che li unisce, cioè se l'asse y è perpendicolare al segmento AA' nel suo punto medio. Pertanto, immaginando di piegare il foglio lungo l'asse y, il quadrilatero ABCD e il suo simmetrico A'B'C'D' devono coincidere perfettamente.
e) Calcola il rapporto tra l'area del triangolo CDC' e l'area del quadrilatero BCC'B'.
Occorre calcolare l'area del triangolo CDC' e quella del quadrilatero BCC'B' e quindi calcolarne il rapporto che è esprimibile per esempio tramite la frazione: $\dfrac{A_{CDC'}}{A_{BCC'B'}}$

4. Genetica

Nel sangue umano una caratteristica genetica è la presenza o meno del fattore Rh.

I casi possibili sono i seguenti:
- individuo con il fattore Rh (**Rh+**); si distinguono due casi:
  - omozigote dominante (qui indicato con RR);
  - eterozigote (qui indicato con Rr);
- individuo senza il fattore Rh (**Rh-**): omozigote recessivo (qui indicato con rr).

Considera le seguenti situazioni:

A) Un genitore omozigote dominante (RR) e un genitore omozigote recessivo (rr);
B) Due genitori entrambi eterozigoti (Rr).
Nella tabella di Punnett devi riportare i dati di un genitore nella prima colonna e quelli dell'altro nella prima riga e quindi completare la tabella intersecando le informazioni.

a) Realizza la tabella di Punnett relativa al caso A);
b) Realizza la tabella di Punnett relativa al caso B);

	R	R
r		
r		

Ricorda che la probabilità è uguale al rapporto tra il numero di casi favorevoli e quello dei casi possibili.
c) Calcola la probabilità che nasca un figlio con fattore Rh- nel caso A)
d) Calcola la probabilità che nasca un figlio con fattore Rh- nel caso B)
e) Indica in quale tra i casi A) e B) è maggiore la probabilità che nasca un figlio Rh+.

Valutazione

Di seguito sono proposte le soluzioni delle prove e un'ipotesi di valutazione.
Per la valutazione dei quesiti vengono presi in considerazione i seguenti elementi:

- Conoscenza specifica della disciplina:
  - regole
  - metodi e procedure
  - principi e teoremi
- Competenza nell'applicazione di concetti e procedure matematiche:
  - utilizzo di conoscenze
  - applicazione di regole
  - individuazione dei procedimenti
- Correttezza nello svolgimento della prova:
  - nei calcoli
  - nei procedimenti
  - nell'uso del linguaggio specifico e delle unità di misura
- Completezza nella risoluzione dei quesiti
- Precisione nella produzione grafica

La valutazione degli elementi sopra indicati concorre a costituire un punteggio per ogni quesito per un massimo di 25, e per la prova globale fino ad un massimo di 100 punti. La valutazione finale della prova, espressa con un voto intero in decimi, può essere attribuita secondo la corrispondenza espressa nella seguente tabella:

punteggio	voto
0 – 34	4
35 – 54	5
55 – 64	6
65 – 74	7
75 – 84	8
85 – 94	9
95 - 100	10

SOLUZIONI PROVA N. 1

Immaginando di svolgere tutti i passaggi come potrebbero fare alcuni alunni, ecco di seguito le soluzioni delle varie richieste:

1. Algebra. Espressioni polinomiali

Date le espressioni:

a. Risoluzione dell'espressione A):

$= 2y + 2x + 2\,(y^2 + 9 + 6y) -18 + 3x -2y^2 + x =$

$= 2y + 2x + 2y^2 + 18 + 12y -18 + 3x -2y^2 + x =$

$= +14y + 6x$

b. Risoluzione dell'espressione B):

$= \{[6x^2 + 3y^2 + 5x^2 + 5xy^2] - [-9xy^2 + 3y^2 + 11x^2] + xy^2 + 2y^3\} : y =$

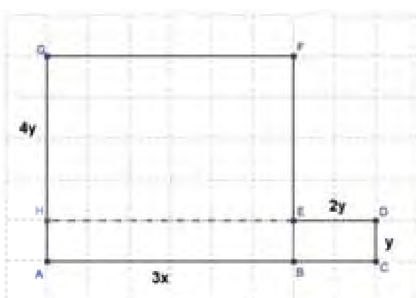
$= \{6x^2 + 3y^2 + 5x^2 + 5xy^2 + 9xy^2 -3y^2 -11x^2 + xy^2 + 2y^3\} : y$

$= \{15xy^2 + 2y^3\} : y =$

$= 15xy + 2y^2$

c. Il polinomio soluzione dell'espressione A) è $+14y + 6x$ e quindi ha grado 1.
Il polinomio soluzione dell'espressione B) è $15xy + 2y^2$ e quindi ha grado 2.

d. $p = AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HA =$
$= 3x + 2y + y + 2y + 4y + 3x + 4y + y =$
$= 6x + 14y$

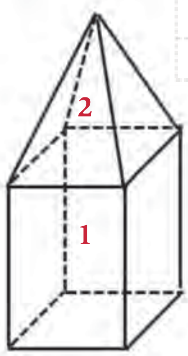


e. $A = A_{ABEH} + A_{BCDE} + A_{EFGH} =$
$= 3x \cdot y + 2y \cdot y + 3x \cdot 4y =$
$= 3xy + 2y^2 + 12xy =$
$= 15xy + 2y^2$

2. Geometria. Parallelepipedo e piramide

DATI

$A_{b1} = A_{b2} = 100\ cm^2$	$a = ?$
$V_1 = 1400\ cm^3$	$S = ?$
$h_2 = 6/5\ l$	$V = ?$
$l = ?$	
$h_1 = ?$	
$S_{L1} = ?$	



Risoluzione

a) $l = l_1 = l_2 = \sqrt{A_b} = \sqrt{100} = 10$ cm

$h_1 = \frac{V_1}{A_{b1}} = \frac{1400}{100} = 14$

b) $p_1 = 4 \cdot l_1 = 4 \cdot 10 = 40$ cm

$S_{L1} = p_1 \cdot h_1 = 40 \cdot 14 = 560$ cm^2

c) $h_2 = \frac{6}{5} \cdot l_1 = \frac{6}{5} \cdot 10 = 12$ cm

$a = \sqrt{h_2^2 + r_2^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$ cm

d) Per disegnare il solido composto in scala 1:5 occorre dividere le misure reali per 5.
In scala 1:5 il lato di base misura 2cm, l'altezza del parallelepipedo 2,8 cm, quella della piramide 2,4 cm e l'apotema della piramide 2,6 cm.

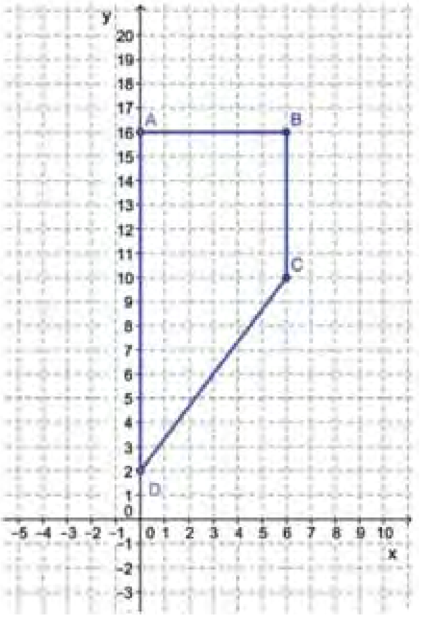
e) $S = S_{L1} + S_{L2} + A_{b2} = 560 + 260 + 100 = 920$ cm^2

$V_2 = \frac{A_{b2} \cdot h_2}{3} = \frac{100 \cdot 12}{3} = 400$ cm^3

$V = V_1 + V_2 = 1400 + 400 = 1800$ cm^3

3. Piano cartesiano

a) Il quadrilatero ABCD è un trapezio rettangolo in A e in B.

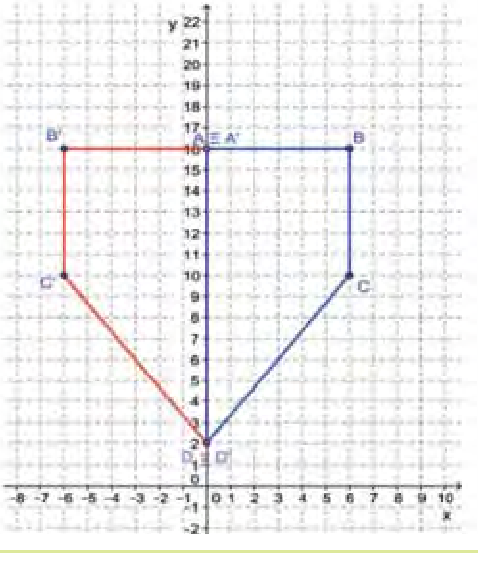


b) Considerando che u = 1 cm

AB = 6 cm; BC = 6 cm; AD = 14 cm

CD $= \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$cm

P = AB + BC + CD + DA = 6 + 6 + 10 + 14 = 36 cm



c) Considerando che u = 1 cm

$A = \frac{(AD+BC) \cdot AB}{2} = \frac{(14+6) \cdot 6}{2} = 60$ cm^2

d) Le coordinate del quadrilatero A'B'C'D' sono:

A' ≡ A (0; +16)

B' (-6; +16)

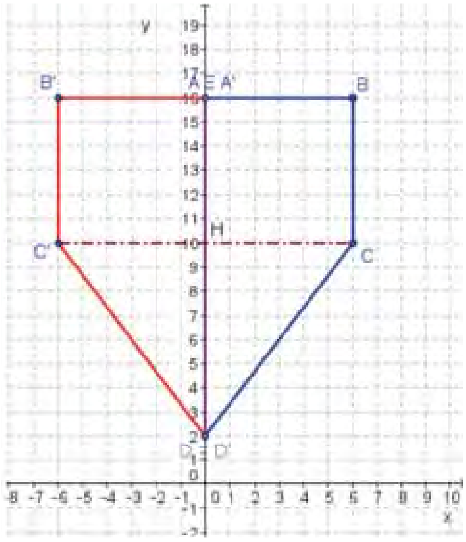
C' (-6; +10)

D' ≡ D (0; +2)

e) $A_{CDC'} = \frac{CC' \cdot HD}{2} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48 \text{ cm}^2$

$A_{BCC'B'} = B'B \cdot BC = 12 \cdot 6 = 72 \text{ cm}^2$

$\text{Rapporto} = \frac{48}{72} = \frac{2}{3}$



4. Genetica

a) La tabella di Punnett relativa al caso A) è la seguente

	R	R
r	*Rr*	*Rr*
r	*Rr*	*Rr*

b) La tabella di Punnett relativa al caso B) è la seguente:

	R	R
R	*RR*	*Rr*
r	*Rr*	*rr*

c) Nel caso A) la probabilità che nasca un figlio con fattore Rh- (ovvero rr) è 0 in quanto in tutti e quattro i casi nascerà un individuo eterozigote (Rr) e quindi con fattore Rh+.

d) Nel caso B) la probabilità che nasca un figlio Rh- (ovvero rr) è uguale al 25%.

e) La probabilità che nasca un figlio Rh+ (ovvero RR o Rr) è maggiore nel caso A) in quanto in tale situazione è uguale al 100%.

SOLUZIONI PROVA N. 2

1. Algebra. Equazioni

a) Risoluzione della prima equazione

$3(x-1) + x^2 + 4x - x(x+5) = 3x - 4$

$3x - 3 + x^2 + 4x - x^2 - 5x = 3x - 4$

$3x + x^2 + 4x - x^2 - 5x - 3x = +3 - 4$

$-x = -1$

$x = 1$

b) Risoluzione della seconda equazione

$$\frac{5x-1}{2} - (x+4) = \frac{x-3}{6}$$

$$\frac{15x - 3 - 6x - 24}{6} = \frac{x-3}{6}$$

Si moltiplicano i due termini dell'equazione per 6, in tal modo si possono semplificare i denominatori.

$15x - 3 - 6x - 24 = x - 3$

$15x - 6x - x = 3 + 24 - 3$

$8x = 24$

$x = 3$

c) Due equazioni si dicono equivalenti se ammettono la stessa soluzione, pertanto avendo le due equazioni precedenti soluzioni diverse, non sono equivalenti.

d) Verifica delle due equazioni:

1) $3(1-1)+1^2+4-1(1+5)=3-4$

$0+1+4-6=-1$

$-1=-1$

2) $\frac{5\cdot 3-1}{2}-(3+4)=\frac{3-3}{6}$

$\frac{14}{2}-7=0$

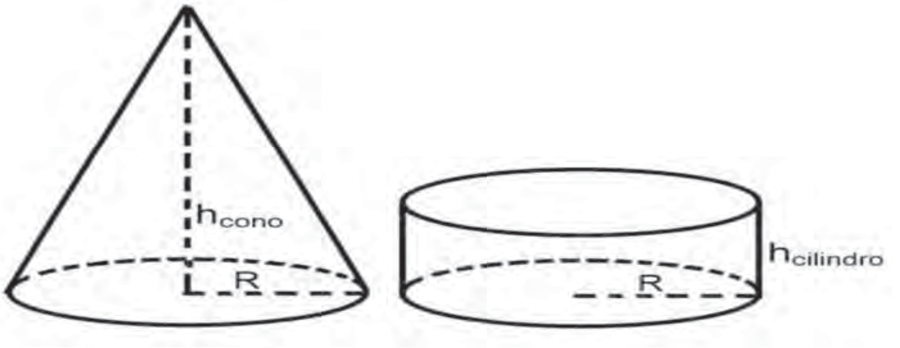
$7-7=0$

$0=0$

e) Un'equazione è impossibile quando non ammette soluzioni. Nella fase di esecuzione si determina un'equazione in forma normale del tipo "0 x = a", dove a è un numero diverso da zero. In tal caso non è possibile trovare un valore numerico che moltiplicato per zero dia un numero diverso da zero.
Un'equazione è indeterminata quando ammette infinite soluzioni. Nella fase di esecuzione si determina un'equazione in forma normale del tipo "0 x = 0". In tal caso qualsiasi valore numerico moltiplicato per zero dà come risultato 0.

2. Geometria. Cilindro e cono

DATI:
A_b = 900 π cm2
$h_{cilindro}$ = 2/5 R



a) $R=\sqrt{\frac{(900\,\pi)}{\pi}}=30$ cm

$h_{cilindro}=\frac{2}{5}\,30=12$ cm

$h_{cono}=3\cdot 12=36$ cm

b) $A_{l\,(cilindro)}=2\,\pi\,R\,h_{cilindro}=2\,\pi\cdot 30\cdot 12=720\,\pi\text{ cm}^2$
$A_{t\,(cilindro)}=A_{l\,(cilindro)}+2\,A_b=720\,\pi\text{ cm}^2+2\cdot 900\,\pi\text{ cm}^2=2520\,\pi\text{ cm}^2$

c) apotema $=\sqrt{R^2+(h_{cono})^2}=\sqrt{900+1296}=46{,}86$ cm
$A_{l\,(cono)}=\pi\,R$ apotema $=\pi\cdot 30\cdot 46{,}86=1405{,}8\,\pi\text{ cm}^2$

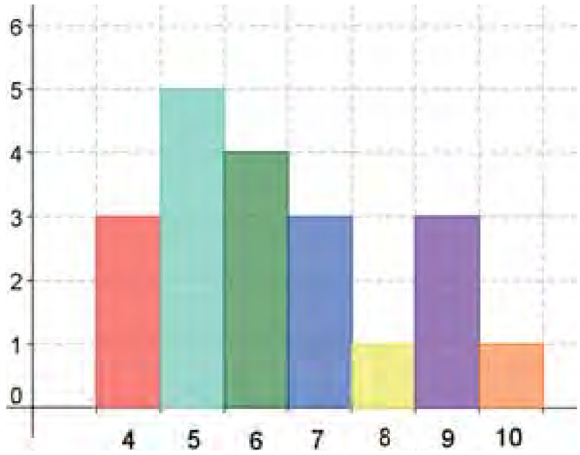
$A_{t\,(cono)}=A_{l\,(cono)}+A_b=1405{,}8\,\pi\text{ cm}^2+900\,\pi\text{ cm}^2=2305{,}8\,\pi\text{ cm}^2$

d) Essendo i due solidi equivalenti è sufficiente calcolare solo un volume:
$V=V_{cilindro}=V_{cono}=\pi\,R^2\,h_{cilindro}=\pi\,900\cdot 12=10800\,\pi\text{ cm}^3$

e) $P_{cilindro}=V\cdot p_s=10800\,\pi\cdot 2{,}6=28080\,\pi\text{ g}=28{,}080\,\pi\text{ kg}$

$P_{cono}=V\cdot p_s=10800\,\pi\cdot 2{,}5=27000\,\pi\text{ g}=27\,\pi\text{ kg}$

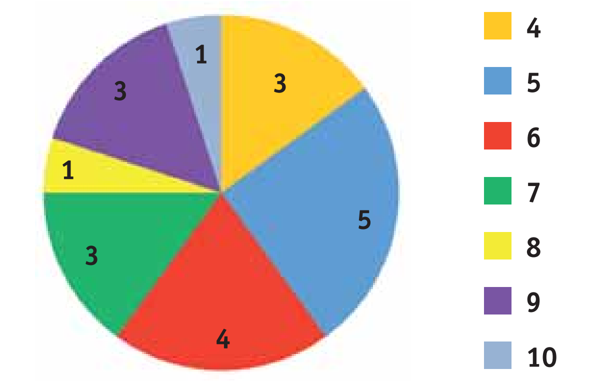
3. Statistica



a) Tabella delle frequenze:

DATI	FREQUENZA ASSOLUTA	FREQUENZA RELATIVA	FREQUENZA PERCENTUALE
4	3	3/20 = 0,15	15 %
5	5	5/20 = 0,25	25 %
6	4	4/20 = 0,20	20 %
7	3	3/20 = 0,15	15 %
8	1	1/20 = 0,05	5 %
9	3	3/20 = 0,15	15 %
10	1	1/20 = 0,05	5 %
TOTALI	20	1	100%

b) Nell'areogramma per calcolare l'angolo del settore circolare corrispondente a ciascun dato in relazione alla propria frequenza, si moltiplica la frequenza percentuale per 3,6.



c) La moda in una distribuzione di dati è il dato che si ripete con maggiore frequenza.
Moda = 5

d) Media aritmetica = $\dfrac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 8 + 9 \cdot 3 + 10}{20} = \dfrac{127}{20} = 6{,}35$

e) La mediana, in una serie di dati ordinati, è il dato centrale (o la media dei due dati centrali).
Mediana = 6

4. Proporzionalità

a) Dai dati riportati in tabella si osserva che l'allungamento della molla cresce all'aumentare dell'intensità della forza, cioè del peso dell'oggetto appeso al dinamometro, pertanto la relazione tra le due grandezze è di proporzionalità diretta.

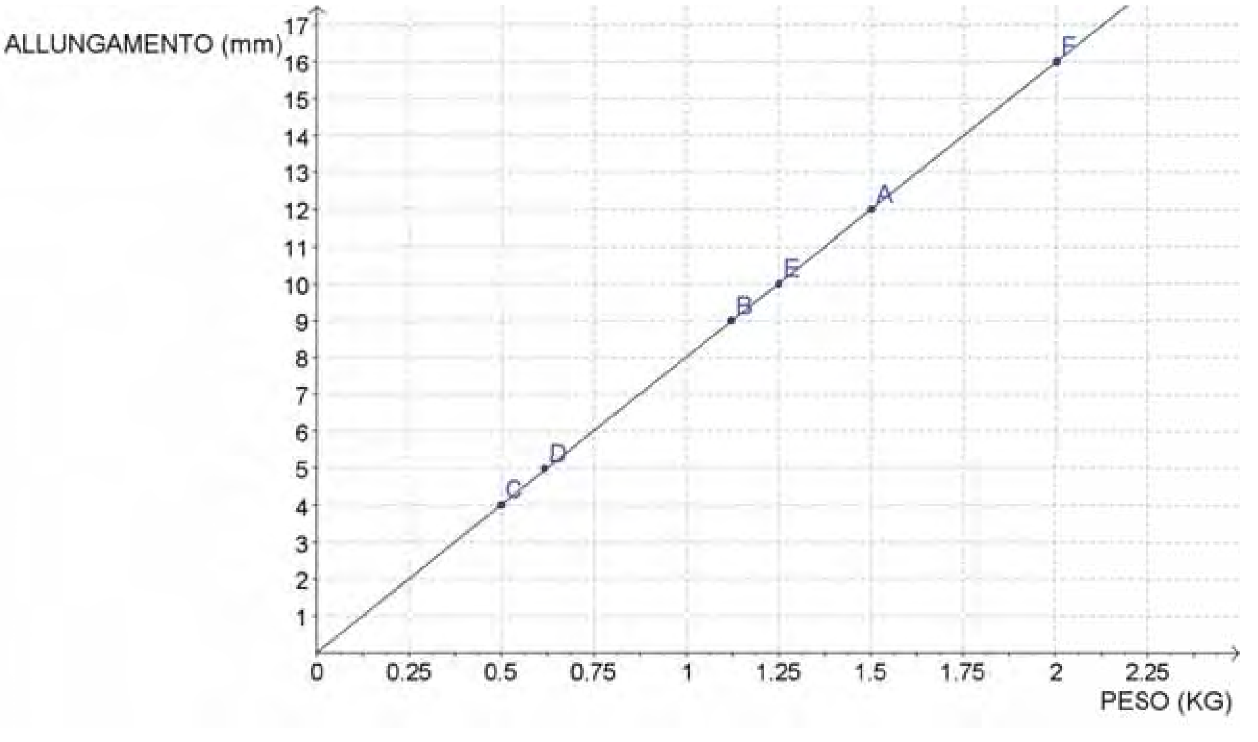
b) La costante si determina calcolando il rapporto tra l'allungamento della molla e il peso dell'oggetto:

$k = \dfrac{12}{1{,}5} = \dfrac{4}{0{,}5} = 8$ e la relazione è $y = 8x$

c) I dati mancanti sono inseriti in tabella in rosso.

x = intensità della forza	*y* = allungamento molla
1,5 kg	12 mm
1,125 kg	9 mm
0,5 kg	4 mm
0,625 kg	5 mm
1,25 kg	10 mm
2 kg	16 mm

d) Il grafico che rappresenta la relazione è il seguente



e) Il grafico ottenuto è una semiretta passante per l'origine degli assi cartesiani.

SOLUZIONI PROVA N. 3

1. Algebra. Equazioni

Per verificare se l'equazione **ax = b** sia determinata, indeterminata o impossibile è necessario discuterla al variare dei due parametri letterali a e b.

Se **a≠0** allora è possibile applicare il secondo principio di equivalenza determinando la soluzione x = b/a (quindi l'equazione è determinata).

Se **a = 0,** allora è necessario prendere in esame il parametro b:

- se **b = 0** allora l'equazione iniziale diventa 0x = 0, che ammette infinite soluzioni pertanto l'equazione è indeterminata;
- se **b≠0** allora l'equazione è impossibile in quanto non è possibile determinare un numero che moltiplicato per zero dia come risultato un valore diverso da zero.

Risoluzione

a) $x-5-2x=-2(x+1)$
$x-5-2x=-2x-2$
$x-2x+2x=-2+5$
$x=3$

b) $\frac{5x+1}{3}-\frac{3}{4}=\frac{4x+3}{12}+\frac{2x+1}{2}$

$\frac{4(5x+1)-9}{12}=\frac{(4x+3)+6(2x+1)}{12}$

$12\cdot\frac{4(5x+1)-9}{12}=\frac{(4x+3)+6(2x+1)}{12}\cdot 12$

$4(5x+1)-9=(4x+3)+6(2x+1)$

$20x+4-9=4x+3+12x+6$

$20x-4x-12x=3+6-4+9$

$4x=14$

$x=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$

c) $(4x-3)^2+2-4(2x-1)^2=2x-8$
$16x^2-24x+9+2-4(4x^2-4x+1)=2x-8$
$16x^2-24x+9+2-16x^2+16x-4=2x-8$
$-24x+9+2+16x-4=2x-8$
$-10x=-15$
$10x=15$
$x=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$

Verifica delle equazioni

a) $3-5-2(3)=-2(3+1)$
$3-5-6=-2(4)$
$-8=-8$

b) $\frac{5\frac{7}{2}+1}{3}-\frac{3}{4}=\frac{4\frac{7}{2}+3}{12}+\frac{2\frac{7}{2}+1}{2}$

$\frac{\frac{35}{2}+1}{3}-\frac{3}{4}=\frac{14+3}{12}+\frac{7+1}{2}$

$\frac{\frac{37}{2}}{3}-\frac{3}{4}=\frac{17}{12}+\frac{8}{2}$

$\frac{37}{6}-\frac{3}{4}=\frac{17}{12}+\frac{8}{2}$

$\frac{74-9}{12}=\frac{17+48}{12}$

$\frac{65}{12}=\frac{65}{12}$

c) $\left(4\,\frac{3}{2}-3\right)^2+2-4\left(2\,\frac{3}{2}-1\right)^2=2\,\frac{3}{2}-8$

$(6-3)^2+2-4(3-1)^2=3-8$

$(3)^2+2-4(2)^2=3-8$

$9+2-4\cdot 4=3-8$
$9+2-16=3-8$
$-5=-5$

2. Geometria. Solidi di rotazione

Un foglio di carta rettangolare (formato A4) ha le dimensioni di 16 cm e 24 cm. Con questo foglio di carta puoi costruire due cilindri diversi tra loro, curvando il foglio in modo da far combaciare l'una coppia o l'altra coppia di lati uguali. Dopo aver rappresentato graficamente le due figure, rispondi alle seguenti domande eseguendo tutti gli opportuni calcoli.

Chiamiamo Cilindro1 il cilindro ottenuto facendo combaciare la coppia di lati più piccoli, mentre chiamiamo Cilindro2 il cilindro ottenuto facendo combaciare la coppia di lati più lunghi.

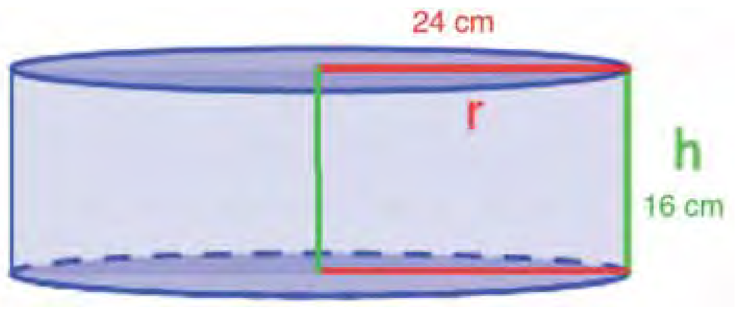
a) I due cilindri avranno la stessa superficie laterale?
Nel Cilindro1 la circonferenza di base misura 24 cm mentre l'altezza vale 16 cm.
Nel Cilindro2 la circonferenza di base misura 16 cm mentre l'altezza vale 24cm.
La superficie laterale si ottiene moltiplicando il perimetro di base con l'altezza del solido.
In formula: $S_l = 2p \cdot h$.

CILINDRO1 $S_l = 2p \cdot h = 24 \cdot 16 = 384\ \text{cm}^2$
CILINDRO2 $S_l = 2p \cdot h = 16 \cdot 24 = 384\ \text{cm}^2$

b) Avranno la stessa superficie totale?
La superficie totale si calcola sommando alla superficie laterale le aree dei due cerchi (2 volte l'area di base) poste all'estremità del solido.
Per entrambi i cilindri dobbiamo prima ricavare la misura del raggio di base.

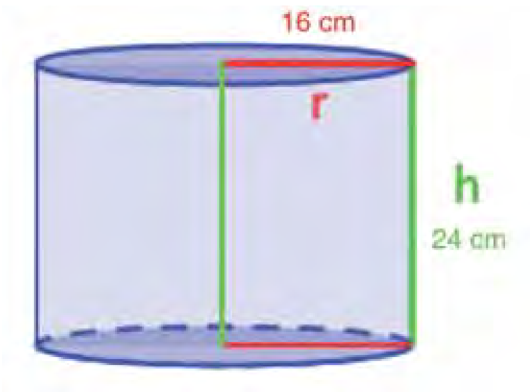
CILINDRO1	$r = \frac{C}{2\pi} = \frac{24}{2\pi} = \frac{12}{\pi}\ cm$ $A_{base} = r^2 \cdot \pi = \left(\frac{12}{\pi}\right)^2 \cdot \pi = \frac{144}{\pi^2} \cdot \pi = \frac{144}{\pi} cm^2$ $S_t = S_l + 2A_{base} = 384 + 2 \cdot \frac{144}{\pi} = 475{,}72 cm^2$
CILINDRO2	$r = \frac{C}{2\pi} = \frac{16}{2\pi} = \frac{8}{\pi}\ cm$ $A_{base} = r^2 \cdot \pi = \left(\frac{8}{\pi}\right)^2 \cdot \pi = \frac{64}{\pi^2} \cdot \pi = \frac{64}{\pi} cm^2$ $S_t = S_l + 2A_{base} = 384 + 2 \cdot \frac{64}{\pi} = 424{,}76 cm^2$

c) Calcola il volume del solido ottenuto dalla rotazione del foglio A4 attorno al lato minore (rappresenta graficamente la figura ottenuta).



Cilindro A
$A_{base} = r^2 \cdot \pi = (24)^2 \cdot \pi = 576\pi\ cm^2$
$V = A_{base} \cdot h = 576\pi \cdot 16 = 9.216\pi\ cm^3$

d) Calcola il volume del solido ottenuto dalla rotazione del foglio A4 attorno al lato maggiore (rappresenta graficamente la figura ottenuta).



Cilindro B

$A_{base} = r^2 \cdot \pi = (16)^2 \cdot \pi = 256\pi\ cm^2$

$V = A_{base} \cdot h = 256\pi \cdot 24 = 6{,}144\pi\ cm^3$

e) Calcola il peso degli ultimi due solidi sapendo che la carta ha $p_s = 0{,}97$

Il calcolo del peso del solido si determina moltiplicando il volume per il peso specifico dato, in formula: $P = V \cdot p_s$.

$$P_{CILINDRO\ A} = V_A \cdot p_s = 9.216\pi \cdot 0{,}97 = 28.070\ g = 28{,}07\ Kg$$
$$P_{CILINDRO\ B} = V_B \cdot p_s = 6.144\pi \cdot 0{,}9\ 7 = 18.713\ g = 18{,}71\ Kg$$

3. Probabilità

a) Quanti sono i casi possibili (ugualmente probabili) per ognuno dei due solidi?

Un cubo regolare presenta 6 facce quadrate equivalenti, e i numeri rappresentati sono 1, 2, 3, 4, 5, 6. Un tetraedro regolare presenta 4 facce triangolari equivalenti e i numeri rappresentati sono 1, 2, 3, 4. Nel cubo i casi possibili (ugualmente probabili) sono 6, mentre nel tetraedro i casi possibili (ugualmente probabili) sono 4.

b) Qual è la probabilità che la faccia a terra del cubo sia il numero 4?

La probabilità che si verifichi l'evento è data dal rapporto tra il numero casi e il numero dei casi possibili, quindi:

$$P_{\text{numero 4 nel cubo}} = \textit{un solo caso*/ sei casi possibili} = 1/6 = 0{,}167$$

(*) = Nell'intervallo dei numeri naturali dal 1 al 6, il numero 4 è presente una sola volta.

c) Qual è la probabilità che la faccia a terra del tetraedro sia il numero 5?

La probabilità che si verifichi l'evento è data dal rapporto tra il numero casi e il numero dei casi possibili, quindi:

$$P_{\text{numero 5 nel cubo}} = \textit{nessun caso*/ sei casi possibili} = 0/4 = 0$$

(*) = Nell'intervallo dei numeri naturali dal 1 al 4, il numero 5 non è presente.

d) Qual è la probabilità che la faccia a terra del cubo sia un numero pari?

La probabilità che si verifichi l'evento è data dal rapporto tra il numero casi e il numero dei casi possibili, quindi:

$$P_{\text{numero pari nel cubo}} = \textit{tre casi*/ sei casi possibili} = 3/6 = 1/2 = 0{,}5$$

(*) = Nell'intervallo dei numeri naturali dal 1 al 6, i numeri pari sono 3.

e) Qual è la probabilità che la faccia a terra del tetraedro sia un numero dispari?

La probabilità che si verifichi l'evento è data dal rapporto tra il numero casi e il numero dei casi possibili, quindi:

$$P_{\text{numero dispari nel cubo}} = (\textit{due casi*/ sei casi possibili} = 2/6 = 1/3 = 0{,}33$$

(*) = Nell'intervallo dei numeri naturali dal 1 al 4, i numeri dispari sono solo 2.

4. Leve

Due bambini si dondolano su un'altalena composta da un bastone lungo 12 m col fulcro posto a metà della sua lunghezza.
Sapendo che il primo bambino pesa 45 kg (R) e si trova a 2 m (b_r) dal fulcro e il secondo bambino pesa 30 kg (P) :

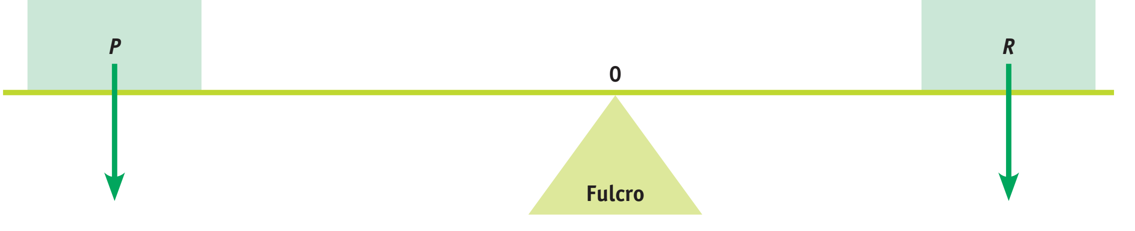
Analiticamente il problema si traduce in questo modo:

$R = 45$	$b_r = 2$	$P = 30$	$b_p = ?$

a) Calcola la distanza dal fulcro del secondo bambino affinché la leva sia in equilibrio.
La legge dell'equilibrio di una leva è $P \times b_p = R \times b_r$, quindi possiamo determinare il braccio e si ottiene

$$b_p = \frac{R \times b_r}{P} = \frac{45 \times 2}{30} = \frac{90}{30} = 3\ m$$

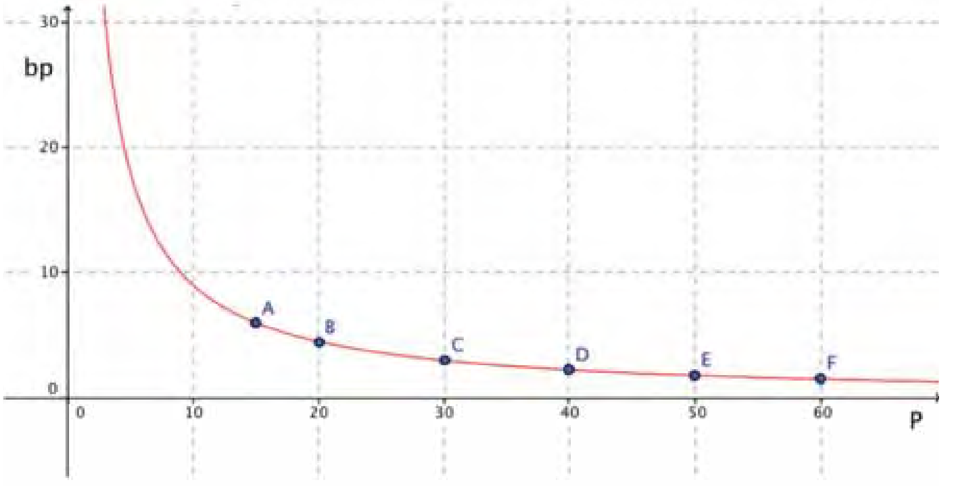
b) Rappresenta con un disegno la leva in modo che sia fedele alla situazione indicata.



c) Mantenendo costanti i valori attribuiti a R e br, completa la tabella in modo che la leva continui a rimanere in equilibrio.
Il valore del prodotto tra la resistenza e il suo braccio è sempre 90. Tenendo in considerazione la legge dell'equilibrio, anche il prodotto tra la potenza e il suo braccio deve valere 90. La tabella completa risulta essere:

P	15	20	30	40	50	60
b_p	6	4,5	3	2,25	1,8	1,5

d) Fissato un sistema di riferimento cartesiano riporta in ascissa i valori della potenza e in ordinata quelli del braccio della potenza e costruisci il grafico.



e) Che legge rappresenta il grafico individuato?
In un sistema di riferimento cartesiano il grafico corrispondente ai valori individuati in tabella è un ramo di iperbole.

Cristina Masella, Nicoletta Passera, Gianandrea Ubiali